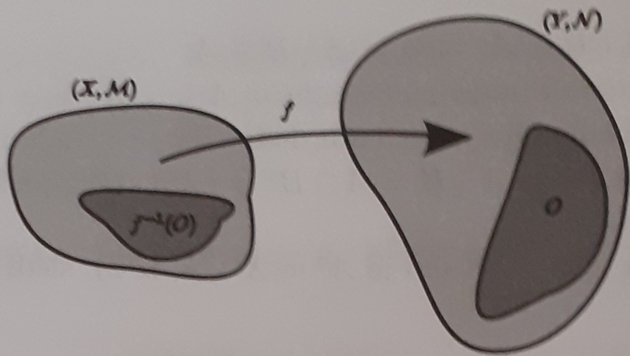
1.2 Merljive funkcije

Definicija 1.5. Neka je $(X, \mathcal{M})$ prostor sa σ–algebrom, (Y, τ) topološki prostor. Funkcija $f : X \to Y$, što ćemo označavati i sa $f : (X, \mathcal{M}) \to (Y, \tau)$, je *merljiva* ako $f^{-1}(w) \in \mathcal{M}$ za svako $w \in \tau$. ▲

Sledeća definicija je česta u literaturi.

Definicija 1.6. Funkcija $f : (X, \mathcal{M}) \to (Y, \mathcal{N})$ ($(Y, \mathcal{N})$ je prostor sa σ– algebrom $\mathcal{N}$), je merljiva ako $f^{-1}(O) \in \mathcal{M}$ za svako $O \in \mathcal{N}$. ▲



Dijagram 1.1: Merljiva funkcija prema Definiciji 1.6 - tehnika povlačenja unazad.

Mi ćemo koristiti Definiciju 1.5 u daljem izlaganju.

Teorema 1.1. Neka je $(X, \mathcal{M})$ prostor sa σ– algebrom i neka su (Y, ν) i (Z, τ) topološki prostori. Ako je $f : (X, \mathcal{M}) \to (Y, \nu)$ merljiva, $g : (Y, \nu) \to (Z, \tau)$ neprekidna, tada je $g \circ f$ merljiva funkcija.

Dokaz: Neka je $O \in \tau$. Važi $(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O))$. Iz neprekidnosti funkcije g sledi $g^{-1}(O) \in \nu$, te iz merljivosti f sledi $f^{-1}(g^{-1}(O)) \in \mathcal{M}$. ■

Primedba. Ako nije drugačije navedeno, uvek ćemo pretpostavljati da su skupovi realnih i kompleksnih brojeva $\mathbf{R}$ i $\mathbf{C}$ topološki prostori sa uobičajenim topologijama. Isto važi za $\mathbf{R}^n$ i $\mathbf{C}^n$.

U sledećoj lemi, kao i nadalje, često ćemo se sretati sa predstavljanjem otvorenog intervala preko zatvorenih intervala i obratno, predstavljanja zatvorenog intervala preko otvorenih intervala. Važe sledeće relacije (videti i Dijagram 3.3):

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right),$$

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right].$$